

مطالعه عددی رفتار شمعی با جدار مایل تحت اثر بار هارمونیک قائم

محمود قضاوی، استادیار دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی اصفهان*

حسین احمدی بیدگلی، کارشناس ارشد، دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی اصفهان، اصفهان

حمید هاشم الحسینی، استادیار دانشکده مهندسی معدن، دانشگاه صنعتی اصفهان، اصفهان

*تلفن: ۰۳۱۱-۳۹۱۳۸۴۴، نمابر: ۰۳۱۱-۳۹۱۲۷۰۰، پست الکترونیکی: ali_tall@yahoo.com

چکیده

در این مقاله با استفاده از روش اجزاء محدود و با در نظر گرفتن رفتار خطی و الاستیک برای شمع و خاک، رفتار شمع مدفون در خاک در اثر بارهای هارمونیک قائم بررسی می‌گردد. فرض می‌شود سطح مقطع شمع دایره‌ای بوده و اتصال کامل بین شمع و خاک وجود دارد. برای اطمینان از صحت کارکرد مدل ابتدا به مدلسازی سیستم شمع-خاک و یافتن مجهولات موجود در آن پرداخته می‌شود و سپس نتایج بدست آمده مدل با نتایج عددی پیشرفته موجود برای شمعی با جدار قائم مقایسه می‌گردد تا از درستی نتایج مدل‌های ساخته شده اطمینان حاصل شود. همچنین نتایج حل عددی با حل‌های تحلیلی ساده و نتایج آزمایشگاهی محدودی که بر روی شمعی با جدار قائم انجام گرفته مقایسه گردیده است. بررسی‌های فوق نشان می‌دهد که شبیه سازی انجام شده در این تحقیق قادر است رفتار شمعی را در حد مطلوبی پیش‌بینی کند. در ادامه، رفتار شمعی با مقطع متغیر مورد مطالعه قرار می‌گردد. نتایج بدست آمده از مطالعات پارامتریک نشان می‌دهد که با طول و حجم یکسان، شمعی با جدار مایل دارای عملکرد بهتری نسبت به شمعی با جدار قائم بوده و با افزایش زاویه میل جداره، دامنه پاسخ را به مقدار بیشتری کاهش می‌دهند.

کلید واژه‌ها: شمع، بار هارمونیک، دامنه پاسخ، سختی، میرایی هندسی.

۱- مقدمه

شمعها عناصری هستند که به عنوان پی ماشین‌آلات و سازه‌هایی که در معرض بارهای دینامیکی از قبیل باد و زلزله قرار گرفته‌اند، استفاده می‌شوند. از آنجا که شمعها نشستهای دائمی را حذف یا کاهش داده و قادرند ارتعاشات ماشین‌آلات را به حجم عظیمی از خاک منتقل نمایند، طراحی دینامیکی شمعها بطور اساسی مورد توجه محققین و مهندسين قرار گرفته است.

در این رابطه روشهایی توسط تاجیمی [۱] و پنزین [۲] بر اساس جرم و فنر متمرکز ارائه گردید. در روش تاجیمی از مدل محیط الاستیک خطی استفاده شده و در روش پنزین از مدل جرم متمرکز استفاده گردیده به گونه‌ای که این مدل غیر خطی بودن خاک را نیز شامل می‌شود. همچنین نواک و همکاران [۳] با استفاده از

روشهای تحلیلی مبتنی بر الاستیسیته خطی، روابطی را بصورت فرم بسته ریاضی برای محاسبه سختی دینامیکی شمع در جهات قائم، افقی و چرخشی شمع بدست آوردند. کاهلمیر [۴ و ۵] نیز به کمک روش اجزاء محدود به مطالعه رفتار شمعهای با جدار قائم تحت بار محوری پرداخت. در این مطالعه شمع و خاک از جنس الاستیک خطی در نظر گرفته شد و فرض گردید شمع بطور کامل به خاک متصل است. سپس او یک مدل ساده جرم متمرکز را ارائه نمود. در تمامی روشهای فوق رفتار شمعهای با جدار قائم تحت بار هارمونیک قائم در نظر گرفته شد. در مورد شمعهای با جدار مایل کار چندانی انجام نشده و تنها در حد چند مقاله محدود می گردد.

سوها و قوش [۶] با استفاده از یک روش تفاضل محدود، ژی و وزیر [۷] با استفاده از یک مدل ریاضی و سرانجام قضاوی و همکاران [۸] با استفاده از یک روش المان محدود به تحلیل شمعهای با مقطع متغیر پرداختند. در تمامی این روشها شمع با مقطع متغیر با یک شمع پله‌ای معادل جایگزین شده و با روش اجزای محدود یک بعدی حل گردیده است. با توجه به ابهامی که در اینگونه مدلسازی وجود داشته و عدم وجود نتایج آزمایشگاهی یا عددی پیشرفته در این زمینه و نیز نتایج متضادی که بین روش‌های فوق‌الذکر مشاهده می شود به بررسی جامع و کلی تر رفتار شمعهای با مقطع متغیر تحت اثر بار هارمونیک قائم با استفاده از یک برنامه عددی مناسب که در آن کل شمع و محیط خاک بصورت اجزای کوچک مدل می گردد پرداخته شد. بررسی عملکرد این روشها خارج از اهداف این مقاله است و در جای دیگر به این مهم پرداخته شده است [۹]. تنها در اینجا ذکر می گردد که با بررسی‌های بعمل آمده توسط احمدی [۹]، روش قضاوی و همکاران [۸] نسبت به دو روش دیگر برتر بوده و می تواند به نحو مطلوبی پاسخ شمعهای با مقطع متغیر تحت بارهای قائم هارمونیک را پیشگویی کند.

۲- روش تحلیل

الف) فرضیات اساسی

- ۱- شمع قائم، الاستیک و با مقطع دایره‌ای بوده، همچنین شعاع مقطع در راستای طولی شمع متغیر فرض می شود.
- ۲- شمع بطور کامل به خاک اتصال دارد.
- ۳- خاک نیمه بی نهایت، الاستیک و همسانگرد محسوب می شود.

ب) نرم افزار مورد استفاده

برای انجام تحلیل، از نرم افزار Plaxis 7.2 استفاده شده که محیط خاک و شمع مدفون در آنرا بصورت تقارن محوری شبیه سازی می کند. با متعادل کردن محیط تحت وزن مصالح، نیروی محوری سینوسی با نموهای زمانی به رأس شمع وارد می شود.

ب) اعمال شرایط تنش و فشار آب حفره‌ای اولیه

قبل از شروع محاسبات بایستی شرایط اولیه تولید گردند. بطور کلی شرایط اولیه از وضعیت سطح آب زیر زمینی، وضعیت هندسی اولیه و تنش‌های مؤثر تشکیل یافته است. در این مطالعه با فرض عدم وجود اثر آب در

مسئله، تعادل محیط خاک با اعمال شرایط تنش اولیه به کمک K_c (ضریب فشار جانبی در حالت سکون) برقرار می‌شود. برای آنکه تمامی مدلها از شرایط تنش اولیه یکسانی برخوردار شوند مقدار K_c برابر ۰/۵ فرض می‌گردد.

ت) میراگرهای جاذب

برای آنکه بتوان پاسخ دینامیکی سیستم خاک - شمع را از یک مدل محدود بدست آورد از میراگرهای جاذب در مرزهای بیرونی مدل استفاده می‌گردد. چگونگی مشخصات این میراگرها در مرجع [۱۰] بطور مبسوط تشریح شده است. قرار دادن ضرایب میراگرهای جاذب برابر واحد باعث می‌شود حدود ۹۵ درصد انرژی رسیده به مرز، ناشی از امواج فشاری و برشی، جذب گردند [۱۰].

ث) ابعاد مدل در جهات افقی و قائم

گسترش شبکه در جهت افقی از مرکز شمع باید به اندازه‌ای باشد که تغییرات تنش برشی در حالت استاتیکی قابل اغماض باشد. همچنین ارتفاع خاک در زیر نوک شمع نیز باید طوری در نظر گرفته شود که تغییرات تنش قائم در حالت استاتیکی تقریباً ناچیز باشد.

برای مقابله با امواج ریلی نیز محدودیتهای زیر بر ابعاد مدل اعمال می‌گردد:

۱- بعد مدل در جهت افقی: از آنجا که ارتعاش سیستم معمولاً پس از پریودهای اول و دوم منظم می‌گردد لذا کافی است که بعد مدل در این راستا به اندازه ۲ برابر طول موج ریلی منظور شود تا حداقل در طول ۴ پریود اول، موج ریلی ساطع شده از مرکز ارتعاش، فرصت برگشتن دوباره به مرکز ارتعاش و ایجاد اغتشاش را نداشته باشد [۹].

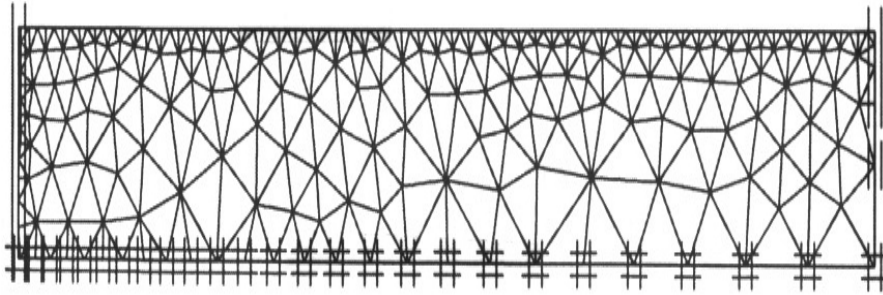
۲- بعد مدل در جهت قائم: با توجه به اینکه دامنه حرکت امواج ریلی از سطح زمین به طرف عمق زمین به سرعت کاهش یافته و در عمقی برابر نصف طول موج، اثر این امواج به مقدار بسیار ناچیزی می‌رسد و از طرفی دیگر در این عمق مقدار ضرایب میراگر لازم برای جذب امواج ریلی برابر ۱/۲۵ می‌گردد که کمی با مقدار انتخاب شده تفاوت دارد، عمق مدل نباید از نصف طول موج ریلی کمتر اختیار گردد [۱۰].

با توجه به نکات فوق و با سعی و خطا و با کنترل اینکه پاسخ نقاط مختلف سیستم شمع - خاک پس از عبور از مرحله انتقالی و گذرا به حالت پایدار می‌رسد مرزهای محیط انتخاب گردیدند [۹].

ج) رابطه اندازه المانها نسبت به طول موج برشی

برای انتقال درست امواج برشی از مدل المان محدود، اندازه المانهای موجود در مدل نسبتی از طول موج برشی قرار داده می‌شوند. این نسبت نیز در تمامی مدلها رعایت گردیده است.

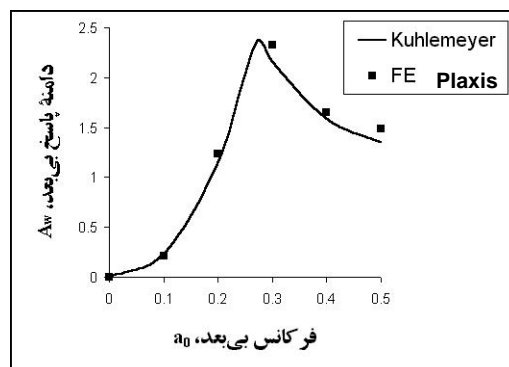
نمونه‌ای از شبکه اجزاء محدود بکار رفته در تحلیل در شکل ۱ نشان داده شده است.



شکل ۱- شبکه اجزای محدود بکار رفته در تحلیل

۳- بررسی صحت کارکرد روش عددی

در این تحقیق، نتایج بدست آمده مدل، با نتایج عددی کاهلمیر [۴ و ۵]، نتایج تحلیلی نواک [۱۱] و نتایج آزمایشگاهی نواک و گریک [۱۲] برای شمعهای با جدار قائم مقایسه گردید تا از درستی نتایج مدل‌های ساخته شده توسط برنامه Plaxis 7.2 اطمینان حاصل شود. به عنوان نمونه یکی از تحلیلهای کاهلمیر [۴ و ۵] در اینجا آورده شده است. در تحلیل مزبور کل شمع و محیط خاک اطراف آن به صورت تقارن محوری و توسط اجزای کوچک مدل گردیده و به تحلیل دینامیکی شمع منفرد با فرض خاک الاستیک و فرض اتصال شمع با خاک پرداخته شده است. همچنین مشخصات هندسی و مصالح بکار گرفته شده در این تحلیل عبارتند از $\omega_s = 0.25$ ، $L/r_0 = 40$ ، $E_p/E_s = 100$ ، $\rho_s/\rho_p = 2$ ، $\phi_s = 0$ ، $\phi_p = 0$ ، $E_p = 10^4$ ، $E_s = 10^5$ و L به ترتیب نسبت پواسون خاک، جرم حجمی خاک، جرم حجمی مصالح شمع، ضریب کشسانی خاک، ضریب کشسانی شمع، طول شمع و شعاع شمع می‌باشد. نمودار دامنه پاسخ بی‌بعد [۴ و ۵] در برابر فرکانس بی‌بعد برای شمع چوبی شناور، به ازاء نسبت جرم $B = 20$ ، در شکل ۲ نشان داده شده است. a_0 پارامتر فرکانس بی‌بعد بوده و از رابطه $a_0 = \frac{\omega r}{V_s}$ محاسبه می‌شود. ω نیز فرکانس دورانی بار وارده می‌باشد. همانگونه که مشاهده می‌شود انطباق بسیار خوبی بین دو تحلیل وجود دارد.

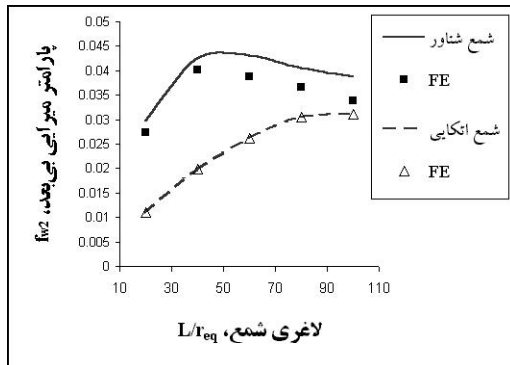


شکل ۲- تغییرات دامنه پاسخ بی‌بعد A_w ، در مقابل فرکانس بی‌بعد a_0 برای شمع چوبی شناور با لاغری ۴۰، به ازاء نسبت

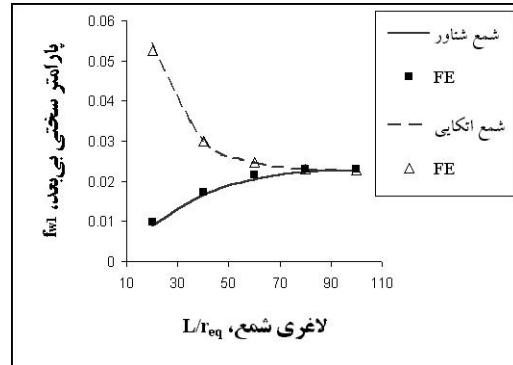
$$B = 20 \text{ جرم}$$

B پارامتر بی بعد نسبت جرم بوده که از روابط $B = \frac{\omega^2 W}{g K a_0^2}$ و $K = \frac{E_s r_0}{F_{st}}$ بدست می آید. همچنین W وزن وارده بر رأس شمع، K ثابت فنر استاتیکی، g شتاب ثقل زمین و F_{st} پارامتر بی بعد دیگری است که مقدار آن بر حسب پارامترهای بی بعد L/r_0 و E_p/E_s بیان می گردد [۴].

همچنین در شکلهای ۳ و ۴ تغییرات پارامتر سختی بی بعد و میرایی بی بعد در مقابل لاغری شمع برای شمع بتنی شناور و اتکایی نشان داده شده است. همانگونه که مشاهده می شود نتایج تحلیلی نواک و نتایج حل عددی انطباق خوبی دارند [۱۱]. در این اشکال f_{w1} پارامتر سختی بی بعد و f_{w2} پارامتر میرایی بی بعد و از روابط $f_{w1} = \frac{k r_0}{E_p A}$ و $f_{w2} = \frac{c V_s}{E_p A}$ بدست می آیند. همچنین k و c به ترتیب سختی و میرایی سیستم شمع- خاک، r_0 و A نیز به ترتیب شعاع و سطح مقطع شمع جدار قائم، E_p مدول الاستیسیته مصالح شمع، و بالاخره V_s سرعت موج برشی در خاک بوده که از رابطه $V_s = \sqrt{G/\rho_s}$ بدست می آید. G مدول برشی و ρ_s جرم حجمی خاک می باشد.

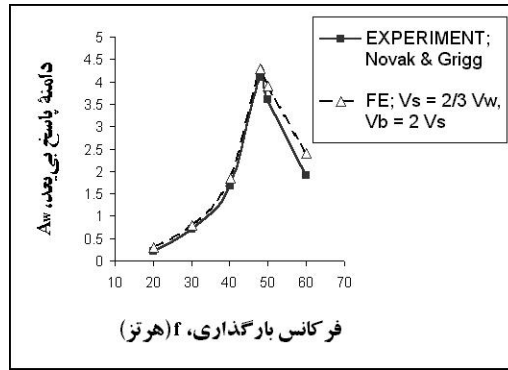


شکل ۴- تغییرات پارامتر میرایی بی بعد f_{w2} در مقابل لاغری L/r_{eq} برای شمع بتنی شناور و اتکایی



شکل ۳- تغییرات پارامتر سختی بی بعد f_{w1} در مقابل لاغری L/r_{eq} برای شمع بتنی شناور و اتکایی

در شکل ۵ تغییرات دامنه پاسخ بی بعد در برابر فرکانس بارگذاری بدست آمده از آزمایشات نواک و گریگ [۱۲] و همچنین تحلیل عددی Plaxis نشان داده شده است. در این تحقیق آزمایشگاهی یک لوله فولادی سیاه استاندارد به طول ۲/۲۵ متر، شعاع ۰/۰۴۴ متر و ضخامت دیواره ۰/۰۰۵۵ متر به عنوان شمع با جدار قائم مورد استفاده قرار گرفت. خاک پیرامون شمع نیز از یک لایه ماسه سیلتی نرم به ضخامت تقریبی ۲/۱ متر تشکیل یافته که زیر آن لایه های شن و نهشته های یخچالی قرار گرفته است. مطابق شکل، رها سازی نوک شمع بدلیل کاهش دادن سختی و افزایش میرایی باعث تطبیق بهتر نتایج حل عددی با نتایج تجربی می گردد. پس می توان نتیجه گرفت که برای ارتعاش قائم، نوک شمع می بایست آزاد در نظر گرفته شود مگر آنکه شمع بر روی یک بستر سنگی قرار گرفته یا طول آن خیلی بزرگ باشد. همانگونه که در شکل نشان داده شده است نتایج عددی بدست آمده از Plaxis با نتایج تجربی انطباق بسیار خوبی دارند.



شکل ۵- تغییرات دامنه پاسخ بی بعد در مقابل فرکانس بارگذاری برای شمع از جنس لوله فولادی سیاه استاندارد - مقایسه نتایج Plaxis با نتایج آزمایشگاهی

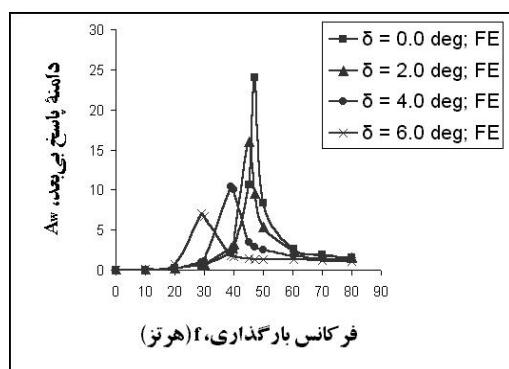
با توجه به شکل‌های ۲ تا ۵ می‌توان گفت که شبیه‌سازی محیط شمع و خاک با Plaxis منطقی و اصولی بوده است. اینک با تکیه بر صحت مدل‌های ساخته شده، می‌توان به بررسی رفتار شمع‌های با مقطع متغیر پرداخت.

۴- مطالعات پارامتریک

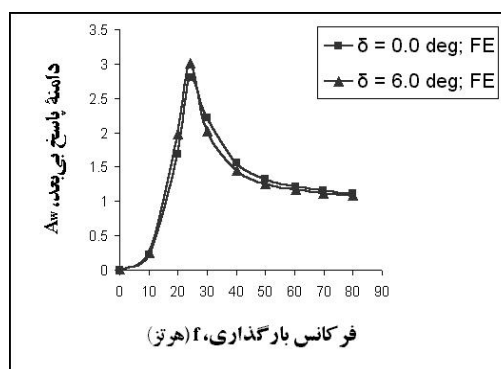
مطالعات پارامتریک بر روی شمع‌های بتنی در دو حالت شناور و اتکایی انجام گرفته است. برای مقایسه رفتار شمع مخروطی با شمع استوانه‌ای، حجم مصالح بکار رفته در هر دو شمع یکسان در نظر گرفته می‌شود. همچنین از دو نوع خاک با تراکم متفاوت استفاده گردیده است. برای شمع شناور خاک با تراکم متوسط متناظر با مدول برشی 13500 کیلو نیوتن بر متر مربع و خاک با تراکم زیاد متناظر با مدول برشی 37500 کیلو نیوتن بر متر مربع می‌باشد. در حالت اتکایی برای خاک اطراف تنه شمع از مقادیر متناظر فوق استفاده گردیده است. برای خاک زیر نوک شمع نیز به ترتیب مقادیر $10^8 \times 1/35$ و $10^8 \times 3/75$ کیلو نیوتن بر متر مربع برای مدول برشی خاک با تراکم متوسط و زیاد در نظر گرفته شده است. همچنین ضریب پواسون خاک $0/3$ و وزن مخصوص آن 18 کیلو نیوتن بر متر مکعب منظور گردیده است. در این مطالعات از سه نوع شمع با لاغری 15 ، 30 و 80 استفاده شده است. شمع با لاغری 15 به طول $1/5$ متر، شعاع $0/1$ متر و وزن مخصوص 24 کیلو نیوتن بر متر مکعب بوده و زاویه جداره شمع‌های مخروطی هم شعاع با شمع استوانه‌ای نیز برابر با 2 ، 4 و 6 درجه می‌باشد. شمع با لاغری 30 به طول 3 متر، شعاع $0/1$ متر و وزن مخصوص 24 کیلو نیوتن بر متر مکعب بوده و زاویه جداره شمع‌های مخروطی نظیر آن برابر با 1 ، 2 و 3 درجه منظور شده است. همچنین شمع با لاغری 80 به طول 8 متر، شعاع $0/1$ متر و وزن مخصوص 24 کیلو نیوتن بر متر مکعب بوده و زاویه جداره شمع‌های مخروطی نظیر آن برابر با 0 و $0/5$ درجه می‌باشد. نمودار دامنه پاسخ در برابر فرکانس بی بعد شمع‌های شناور، به ازاء تغییرات زاویه جداره d ، به ترتیب در شکل‌های ۶- الف، ۶- ب و ۶-

پ برای لاغریهای ۱۵، ۳۰ و ۸۰ نشان داده شده است. همچنین تغییرات مزبور برای حالت اتکایی در شکلهای ۷-الف، ۷-ب و ۷-پ آمده است.

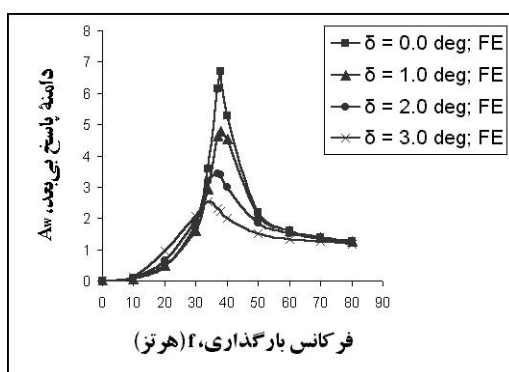
مطابق شکل برای شمعههای شناور کوتاه، با افزایش زاویه میل جداره، فرکانس تشدید کاهش ناچیزی می‌یابد. همچنین با افزایش طول شمع اثر کاهش فوق از بین می‌رود، بطوریکه در شمعههای بلند افزایش زاویه میل جداره باعث افزایش فرکانس تشدید می‌گردد. برای شمعههای اتکایی کوتاه، با افزایش زاویه میل جداره، فرکانس تشدید کاهش زیادی می‌یابد. همچنین با افزایش طول شمع اثر کاهش فوق از بین می‌رود، بطوریکه در شمعههای بلند افزایش زاویه میل جداره باعث افزایش فرکانس تشدید می‌گردد. همچنین همانگونه که مشاهده می‌کنید با افزایش زاویه میل جداره و طول شمع، دامنه پاسخ پی کاهش بیشتری می‌یابد. البته کاهش دامنه پاسخ شمعههای اتکایی نسبت به شمعههای شناور بیشتر است. با افزایش طول شمع نیز، اثر گیرداری انتهایی کاهش یافته و در نتیجه شمع شناور و اتکایی همانند یکدیگر عمل می‌کنند. شکلهای نشان داده شده در بالا برای حالت خاک با تراکم زیاد بوده است. ضمناً برای حالت خاک با تراکم متوسط نیز نتایج مشابهی بدست آمده که ذکر نتایج آن در جای دیگری آمده است [۹].



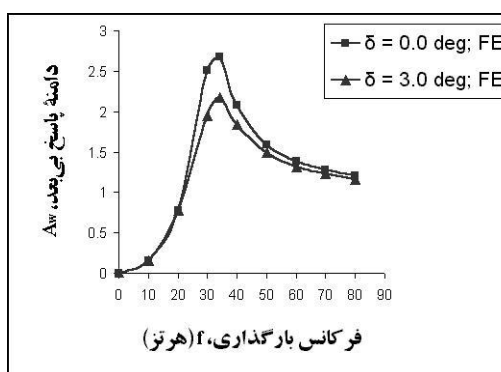
(الف)



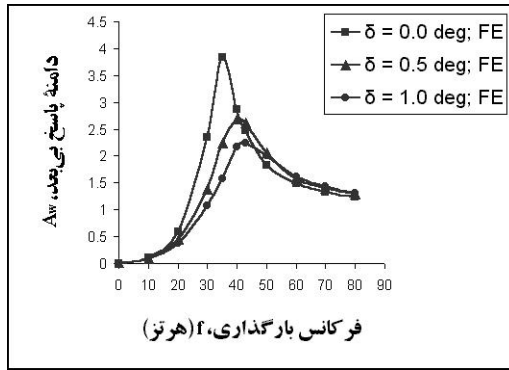
(الف)



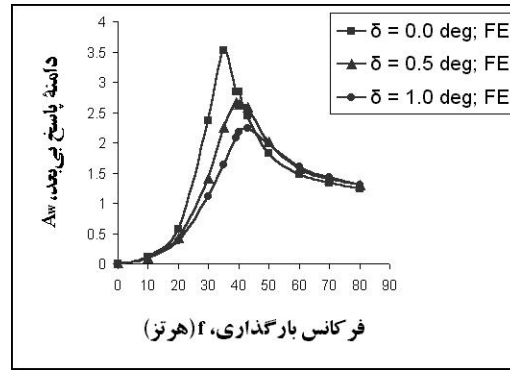
(ب)



(ب)



(پ)



(ب)

شکل ۷- تغییرات دامنه پاسخ بی بعد A_w در مقابل فرکانس بارگذاری f برای شمع اتکایی؛ الف- شمع کوتاه ($L/r_{eq} = 10$)، ب- شمع متوسط ($L/r_{eq} = 30$)، پ- شمع بلند ($L/r_{eq} = 80$)

شکل ۶- تغییرات دامنه پاسخ بی بعد A_w در مقابل فرکانس بارگذاری f برای شمع شناور؛ الف- شمع کوتاه ($L/r_{eq} = 10$)، ب- شمع متوسط ($L/r_{eq} = 30$)، پ- شمع بلند ($L/r_{eq} = 80$)

۵- بحث

با توجه به هندسه شمع با جدار مایل کاهش دامنه پاسخ در تمامی حالات فوق را می توان ناشی از مؤلفه میرایی هندسی ایجاد شده توسط خاک در صفحات تصویر افقی جداره شمع دانست. ضمناً میرایی مواد نیز نقش مهمی در کاهش دامنه حرکت شمع دارد. آنچه بعنوان نتایج در این مقاله ارائه شد محدود به اثر میرایی هندسی است که باعث می شود تا پاسخ ارتعاشی شمع استهلاک یابد. همچنین بایستی در نظر داشت که در اثر فشار جانبی سطح شمع بر روی خاک اطراف، چگالی خاک افزایش یافته، در نتیجه سختی و میرایی هندسی نیز افزایش می یابد. لذا کاهش بیشتری را برای دامنه پاسخ می توان انتظار داشت. بررسی این آثار خارج از اهداف این مقاله می باشد.

۶- نتیجه گیری

در این مقاله برای انجام تحلیل، از نرم افزار Plaxis 7.2 استفاده شده که محیط خاک و شمع مدفون در آنرا بصورت تقارن محوری شبیه سازی می کند. با متعادل کردن محیط تحت وزن مصالح و وزن ماشین آلات، نیروی محوری سینوسی با نموهای زمانی به رأس شمع وارد شده است. نتایج مطالعات انجام شده بر روی شمعهای با مقطع متغیر نشان می دهد که با افزایش زاویه میل جداره و طول شمع، دامنه پاسخ شمع کاهش بیشتری می یابد. همچنین با افزایش طول و گیرداری انتهایی شمع، اثر اصلاح هندسه شمع افزایش می یابد. بطور کلی، شمعهای با مقطع متغیر می توانند رفتار مطلوبتری نسبت به شمعهای استوانه ای با همان طول و حجم مصالح تحت اثر بارهای هارمونیکی قائم یکسان داشته باشند.

۷- مراجع

[1] Tajimi, H., "Earthquake Response of Foundation Structures," *Report of the Faculty of Science*

- and Engineering, Nihon University, Tokyo City, Jap., pp.1.1-3.5, 1966.
- [2] Penzien, J., "Soil-Pile Foundation Interaction," In *Earthquake Engineering*, Edited by R. L. Wiegel, Prentice-Hall, Inc., Eaglewood Cliffs, N. J., pp. 349-381, 1970.
- [3] Novak, M., "Dynamic Stiffness and Damping of Piles," *Canadian Geotechnical Journal*, Vol. 11, No. 4, pp. 574-598, 1974.
- [4] Kuhlemeyer, R. L., "Vertical Vibrations of Piles," *Journal of Geotechnical Engineering*, ASCE, Vol. 105, No. GT2, pp. 273-287, 1979.
- [5] Kuhlemeyer, R. L., "Dynamic Response Curve for Vertically Loaded Floating Pile Foundations," *Canadian Geotechnical Journal*, Vol. 18, pp. 300-312, 1981.
- [6] Saha, S. and Ghosh, D. P., "Vertical Vibration of Tapered Piles," *Journal of Geotechnical Engineering*, ASCE, Vol. 112, No. 3, pp. 290-301, 1986.
- [7] Xie, J. and Vaziri, H. H., "Vertical Vibration of Nonuniform Piles," *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 117, No. 5, pp. 1105-1118, 1991.
- [8] Ghazavi, M., Williams, D. J., and Morris, P. H., (1997) "Numerical Analysis of Dynamically Loaded Tapered Piles," *Proceedings 2nd International Symposium on Structures and Foundations in Civil Engineering*, Hong Kong, 170-176, 1997.
- [۹] احمدی بیدگلی حسین. "بررسی رفتار شمعهای با جدار مایل تحت اثر بار هارمونیک قائم"، پایان نامه کارشناسی ارشد، دانشکده عمران، دانشگاه صنعتی اصفهان، ۱۳۸۱
- [10] Lysmer, J., and Kuhlemeyer, R. L., "Finite Dynamic Model for Infinite Media," *Journal of the Engineering Mechanics Division*, ASCE, Vol. 95, No. EM4, Proc. Paper 6719, Aug., pp. 859-877, 1969.
- [11] Novak, M., "Vertical Vibration of Floating Piles," *Journal of Engineering Mechanics Division*, ASCE, Vol. 103, No. EM1, pp. 153-168, 1977.
- [12] Novak, M., and Grigg, R. F., "Dynamic Experiments with Small Pile Foundations," *Canadian Geotechnical Journal*, Vol. 13, pp. 372-385, 1976.